10-01

10. 1. Число 100^{40} представляет из себя единицу и 80 нулей после неё. После вычитания из 100^{40} числа 100^{30} останется число с 60 нулями на конце. Оставшиеся нули превратятся в девятки. Для примера рассмотрим вычитание чисел ~~на 10 нуля~~ с меньшим количеством нулей на конце – например, 8 и 6.

$$\begin{array}{r}100000000\\ -\;1000000\\ \hline 99000000\end{array}$$

, как видим, полученное число имеет $8-6=2$ девятки и 6 нулей. В нашем случае $100^{40}-100^{30}$ = число из $80-60=20$ девяток и 60 нулей при прибавлении 100^{20} девятнадцатый от начала числа ноль сменится на единицу. Вновь обратимся к нашему примеру поменьше и прибавим число с 4-мя нолями:

$$\begin{array}{r}99000000\\ +\;10000\\ \hline 99010000\end{array}$$

Видим, что ноль с номером $(6-4)-1$ сменился на единицу. Значит, число $100^{40}-100^{30}+100^{20}$ = число из 20 девяток, 19 нулей, 1 единицы и еще 40 нулей. Отнимая 100^{10}, мы фактически заменим на 9 все нули после 1, кроме 20 крайних; единица же станет нулем.

$$\begin{array}{r}99010000\\ -\;100\\ \hline 99009900\end{array}$$

Таким образом, получим 20 девяток, 20 нулей, снова 20 девяток и 20 нолей. Прибавление к этому числу 1 заменит крайний ноль на единицу, что очевидно без примеров. Сумма цифр полученного числа равна $20\cdot9+20\cdot0+20\cdot9+19\cdot0+1 = 180+180+1 = 361$ Ответ: 361.

7б

10.3. Имеем уравнения.

$f(x)=g(x)$

$g(x)=h(x)$ Перепишем их как:

$f(x)=h(x)$

$$ax^2+bx+c=bx^2+cx+a$$
$$bx^2+cx+a=cx^2+ax+b$$
$$ax^2+bx+c=cx^2+ax+b$$

Перенесем слагаемые в одну сторону и вынесем общий множитель.

$$a(x^2-1)+bx(1-x)+c(1-x)=0$$
$$b(x^2-1)+cx(1-x)+a(1-x)=0$$
$$c(1-x^2)+ax(x-1)+b(x-1)=0$$

И вновь вынесем общий множитель:

$$a(x^2-1)+(bx+c)(1-x)=0$$
$$b(x^2-1)+(cx+a)(1-x)=0$$
$$c(1-x^2)+(ax+b)(x-1)=0$$

Перенесем через знак равенства часть слагаемых:

$(bx+c)(1-x)=a(1-x^2)$

$(cx+a)(1-x)=b(1-x^2)$

$(ax+b)(1-x)=c(1-x^2)$

Для удобства вместо знака „минус" при переносе был изменен порядок вычитания в скобках: в двух первых случаях $(x^2-1)=-(1-x)^2$, в третьем случае $(x-1)=-(1-x)$.

Известно, что каждое уравнение имеет по 2 корня. Первым корнем для каждого является $x=1$, при котором $1-x=0$ и $1-x^2=0$.

Учитывая этот корень, делим обе части уравнений на $1-x$ (помним, что $1-x^2=(1-x)(1+x)$)

$bx+c=a(1+x)$ $\quad$ $bx+c-a-ax=0$ $\quad$ $x(b-a)+c-a=0$

$cx+a=b(1+x)$ $\Rightarrow$ $cx+a-b-bx=0$ $\Rightarrow$ $x(c-b)+a-b=0$ $\Rightarrow$

$ax+b=c(1+x)$ $\quad$ $ax+b-c-cx=0$ $\quad$ $x(a-c)+b-c=0$

$\Rightarrow$ $x=\frac{a-c}{b-a}$, $x=\frac{b-a}{c-b}$, $x=\frac{c-b}{a-c}$. Произведение этих корней равно $\frac{(a-c)(b-a)(c-b)}{(b-a)(c-b)(a-c)}=1$, что при умножении на 1 три раза (1 – второй корень каждого уравнения) даст результат 1. Ответ: 1 7б.

10.5. Посчитаем кол-во единичных отрезков в таком квадрате. Не считая его границы, в нем 9 вертикальных и 9 горизонтальных линий. 9 вертикальных поделят 9 горизонтальных на 90 кусков (на 10 каждую), так же делят горизонтальные линии вертикальные – итого 180 отрезков. Прибавим $10\cdot4=40$ отрезков, составляющих границы квадрата и получим в итоге 220 ед. отрезков. Очевидно, что горизонтальных и вертикальных отрезков среди них поровну, т.е. по 110.

Далее. „Уголок" составлен из 1 вертикального и 1 горизонтального отрезка, „Отрезки по 2" – из двух вертикальных или двух горизонтальных. Число 21 – нечетное, и 21 „отрезок по 2" неизбежно займет горизонтальных и вертикальных отрезков неравное количество. Останется их тогда тоже неравное количество, и разбить из них „уголки" не выйдет. Значит, 21 отрезок по 2 в скелете такого квадрата не может быть расположен. Ответ: нет. 7б.

10-01

10.2. Число 2^{2021} можно расписать как $2^{2020} \cdot 2 = 2^{2020} + 2^{2020}$. Предположим, $2^{2020} + 2^{2020}$ представляет из себя сумму чисел $x(x-1)$ и $y(y-1)$

Российская Федерация
Департамент образования Белгородской области
областное государственное бюджетное
общеобразовательное учреждение
«Борисовская средняя общеобразовательная
школа имени Героя Советского Союза
А.М. Рудого» Белгородской области
(ОГБОУ «Борисовскаяя СОШ»)
309340, Белгородская область,
пос. Борисовка, ул. Советская, 1
тел.: 8(47246) 5-10-27
_______________ № _______________
На № _______________ от _______________

Таким образом, $x^2 - x + y^2 - y = 2^{2020} + 2^{2020}$

Если предположить, что $y = x+1$, то

$x^2 - x + (x+1)^2 - (x+1) = 2^{2020} + 2^{2020}$

$x^2 - x + x^2 + 2x + 1 - x - 1 = 2^{2020} + 2^{2020}$

$x^2 + x^2 = 2^{2020} + 2^{2020}$.

$x^2 = 2^{2020}$

$x = \sqrt{2^{2020}} = 2^{1010}$. Видим, что сумму 2^{2021} дадут числа ~~2^{1010} и 2^{101}~~ $2^{1010} \cdot (2^{1010} - 1)$ и $(2^{1010} + 1) \cdot 2^{1010}$. Значит, такое возможно.

5 б.

Итого: 26 б.

ОД / Зенина О.Д /.

/ Семенова Н.Д /